

DEVOIR n°5
corrigé

Exercice 1: (4 points)

1. $y = k e^{\left(\frac{2}{3}\right)^x}$ avec $k \in \mathbb{R}$
2. $f(0) = 2 \Leftrightarrow k e^0 = 2 \Leftrightarrow k = 2$ d'où $f(x) = 2 e^{\left(\frac{2}{3}\right)^x}$

Exercice 2: (7 points)

1. $y(x) = A \cos x + B \sin x$ avec A et $B \in \mathbb{R}$.
2. $f(0) = 1 \Leftrightarrow A \cos 0 = 1 \Leftrightarrow A = 1$
 $f'(x) = -A \sin x + B \cos x$ donc $f'(0) = 1 \Leftrightarrow B \cos 0 = 1 \Leftrightarrow B = 1$
 d'où $f(x) = \cos x + \sin x$
3. Avec les formules de trigonométrie, développons $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$:

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos x \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin x \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos x + \sin x)$$
 donc $\sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos x + \sin x) = \cos x + \sin x = f(x)$
4. $f(x) = -1 \Leftrightarrow \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ donc on a:
 $x - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$ ou $x - \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$ soit $x = \pi$ ou $x = \frac{3\pi}{2}$ qui sont donc les solutions de l'équation.

Exercice 3: (9 points)

1. $y(x) = A \cos 3x + B \sin 3x$
2. $f(0) = \sqrt{2} \Leftrightarrow A = \sqrt{2}$
 $f'(x) = -3A \sin 3x + 3B \cos 3x$ donc $f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow -3A \sin \pi + 3B \cos \pi = 3\sqrt{2}$
 d'où $-3B = 3\sqrt{2}$ et $B = -\sqrt{2}$
 L'expression de la solution particulière est donc $f(x) = \sqrt{2} \cos 3x - \sqrt{2} \sin 3x$
3. On a

$$\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos 3x \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin 3x \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos 3x \frac{\sqrt{2}}{2} - \sin 3x \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos 3x - \sin 3x)$$
 Donc on a $2 \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = 2 \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos 3x - \sin 3x) = \sqrt{2} (\cos 3x - \sin 3x) = f(x)$
4. a) $f(x) = -\sqrt{2} \Leftrightarrow 2 \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} \Leftrightarrow \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

donc $3x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$ ou $3x + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$ c'est à dire $x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = \frac{\pi}{3}$ qui sont les solutions de l'équation.

b)