DEVOIR SURVEILLE n°4

corrigé

Exercice 1: *(4 points)*

$$P_C(Y)=\frac{P(C\cap Y)}{P(C)}=\frac{0{,}35}{0{,}4}=0{,}875 \qquad \text{et} \qquad P_Y(\overline{C})=\frac{P(\overline{C}\cap Y)}{P(Y)}=\frac{0{,}15}{0{,}5}=0{,}3$$

Exercice 2: *(5 points)*

1. $4v'+v=0 \Leftrightarrow v'+\frac{1}{4}v=0$ l'ensemble des fonctions solutions sont de la forme $y(x)=k\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{4}}$ $k\in\mathbb{R}$

2. $u(x)=A\,\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}+B$ donc $u'(x)=\frac{A}{2}\,\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$

   u est solution de *(E)* $\Leftrightarrow$ $4\frac{A}{2}\,\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}+A\,\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}+B=3\,\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-1$ ce qui donne $3A\,\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}+B=3\,\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-1$

   et on obtient $A=1$ et $B=-1$ et donc $u(x)=\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-1$

3. L'équation *(E)* a donc pour solutions les fonctions de la forme: $v(x)=\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-1+k\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{4}}$

4. $v(0)=0 \Leftrightarrow 1-1+k=0 \Leftrightarrow k=0$ La solution particulière est donc $v(x)=\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-1$

Exercice 3: *(11 points)*

1. a) $y(x)=k\,\mathrm{e}^{-x}$ avec $k\in\mathbb{R}$

   b) $g(t)=k\,\mathrm{e}^{-0{,}25t}$ donc $g'(t)=-0{,}25\,k\,\mathrm{e}^{-0{,}25t}$

   $g'+g=\mathrm{e}^{-0{,}25t} \Leftrightarrow -0{,}25\,k\,\mathrm{e}^{-0{,}25t}+k\,\mathrm{e}^{-0{,}25t}=\mathrm{e}^{-0{,}25t} \Leftrightarrow -0{,}25\,k+k=1 \Leftrightarrow k=\frac{1}{0{,}75}=\frac{4}{3}$

   donc $g(x)=\frac{4}{3}\,\mathrm{e}^{-0{,}25x}$ est une solution particulière de (E).

   c) La solution générale est donc de la forme $y(x)=\frac{4}{3}\,\mathrm{e}^{-0{,}25x}+k\,\mathrm{e}^{-x}$

   d) $y(0)=20 \Leftrightarrow \frac{4}{3}+k=20 \Leftrightarrow k=20-\frac{4}{3}=\frac{56}{3}$

   La solution particulière cherchée est donc $y(x)=\frac{4}{3}\,\mathrm{e}^{-0{,}25x}+\frac{56}{3}\,\mathrm{e}^{-x}$

2. a) $\lim_{t\to+\infty} f(t)=0$ car $\lim_{t\to+\infty}\mathrm{e}^{-t}=0$

b) $f'(t)=\frac{1}{3}\left(-56\,e^{-t}-e^{-0,25\,t}\right)$

c) $f'(t)$ est donc toujours négatif pour $t\in[0\,;+\infty[$ ce qui donne le tableau de variation suivant:

x	0	$+\infty$
signe de f'	-	
f	20 $\searrow$	0