DEVOIR SURVEILLE n°4

Exercice 1:

Une boîte contient 10 boules. Sur chacune d'elles on a inscrit un nombre suivant le tableau ci-dessous:

Nombre inscrit	5	6	10	11	12	13	14
Nombre de boules	1	2	1	3	1	1	1

Un joueur mise 10 euros, tire une boule au hasard, et reçoit la somme (en euros) inscrite sur la boule.

1. Le joueur joue une fois. On appelle p_1 la probabilité qu'il perde de l'argent (c'est à dire qu'il reçoive moins de 10 euros à l'issue du tirage) et p_2 la probabilité qu'il reçoive plus de 10 euros. Donner p_1 et p_2.
2. Soit *X* la variable aléatoire qui, à chaque tirage, fait correspondre le « gain » du joueur (une perte est un « gain » négatif). Par exemple: si un joueur tire le nombre 12, son « gain » est +2; s'il tire le 6, son « gain » est -4.
   a) Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire *X*?
   b) Présenter la loi de probabilité de *X* dans un tableau.
   c) Calculer son espérance mathématique *E(X)*. Que représente *E(X)* pour le joueur ?
   d) Calculer la variance et l'écart-type de *X*.
3. Il s'agit maintenant, en changeant le nombre inscrit sur UNE boule, de rendre ce jeu équitable (c'est-à-dire que l'espérance mathématique de la variable aléatoire associée doit être nulle). Proposer une solution.

Exercice 2:

L'entreprise a fabriqué en un mois 900 chaudières à cheminée et 600 chaudières à ventouse. Dans ce lot, 1 % des chaudières à cheminée sont défectueuses et 5 % des chaudières à ventouse sont défectueuses.
On prélève au hasard un chaudière dans la production de ce mois. Toutes les chaudières ont la même probabilité d'être prélevées.
On considère les événements suivants :
A :" La chaudière est à cheminée " ;
B :" La chaudière est à ventouse ";
D : "La chaudière présente un défaut ".

1. Déterminer P(A), P(B) , P(D/A) et P(D/B).
2. Calculer P(D∩A) et P(D∩B).
3. En remarquant que D = (D∩A) ∪ (D∩B) et que les événements (D∩A) et (D∩B) sont incompatibles, calculer P(D) et P($\overline{D}$).

Problème:

Partie A – Questions préliminaires

Soit g la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par: $g(x)=x\,\mathrm{e}^{-x}=\dfrac{x}{\mathrm{e}^{x}}$.

1. a) Déterminer la limite de la fonction g en $+\infty$.

   b) Calculer $g'(x)$ et étudier son signe, pour x appartenant à $[0;+\infty[$.

   c) Dresser le tableau de variation de la fonction g.

2. En utilisant 1c), montrer que, pour tout x appartenant à $[0;+\infty[$, $g(x)<1$.

Partie B – Etude et représentation graphique d'une fonction

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par: $f(x)=\mathrm{e}^{-x}+\ln x$.

On note C_f sa courbe représentative dans un repère ortohonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité graphique 4 cm).

1. a) Déterminer la limite de la fonction f en 0.

   En déduire l'existence d'une asymptote à la courbe C_f.

   b) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

   c) Montrer que $f'(x)=\dfrac{1-g(x)}{x}$.

   En utilisant la question A.2., montrer que pour tout x appartenant à $]0;+\infty[$, $f'(x)>0$.

   d) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

2. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique, notée x_0 , dans $]0;+\infty[$.

   Montrer que $0{,}5<x_0<0{,}6$.

3. Tracer la courbe C_f dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Partie C – Calcul d'aire

Soit G la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $G(x)=x\ln x-x$.

1. Calculer $G'(x)$. En déduire une primitive de f sur $]0;+\infty[$.

2. Calculer, en cm^2, l'aire S de la partie du plan comprise, sur le graphique, entre l'axe des abscisses, la courbe C_f, et les droites d'équations respectives $x=1$ et $x=2$.

   On donnera la valeur exacte de S et sa valeur arrondie à 0,01 cm^2 près.

   Calculer la valeur exacte de l'aire, en cm^2, de la surface comprise, sur le graphique, entre la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x=1$ et $x=e$.