DEVOIR SURVEILLE n°2

Exercice 1: (5 points)

A la suite de violents orages, des eaux de ruissellement polluées à 4% par des triazines (pesticides très utilisés) se déversent dans un bassin aménagé pour la baignade.

Un système d'évacuation permet de maintenir dans ce bassin un volume constant de 30000 litres d'eau.

On admet que le volume de triazines dans l'eau du bassin à l'instant t $(t \geqslant 0)$ est solution de l'équation différentielle *(E)* :

$$y'(t)+5\cdot 10^{-3}\, y(t)=6$$

1. a) Résoudre sur [0,+∞[l'équation différentielle (E_0) :

$$y'(t)+5\cdot 10^{-3}\, y(t)=0$$

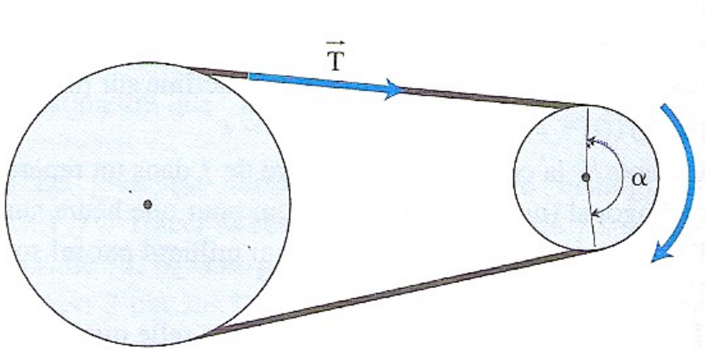
   b) Déterminer une fonction constante g solution de l'équation *(E)*

   c) Résoudre sur [0,+∞[l'équation *(E)*.

2. On suppose qu'à l'instant $t=0$, le volume de triazines dans l'eau du bassin est nul.
   Déterminer la fonction *f*, solution de l'équation différentielle *(E)*, satisfaisant à cette condition.
3. Les baigneurs peuvent souffrir d'affections cutanées dès que le taux de triazines dans l'eau du bassin atteint 2%. Déterminer l'instant auquel ce taux est atteint.

Exercice 2: (7 points)

On considère le schéma suivant où la petite poulie « poulie menante » entraîne l'autre poulie par l'intermédiaire d'une courroie.



On démontre que l'intensité de la tension $\vec{T}$ dans le brin menant se calcule par la formule:

$$T=F\ \frac{e^{k\alpha}}{e^{k\alpha}-1}$$

- ✦ *F* est l'intensité de la force tangentielle sur la poulie menante exprimée en déca Newtons. (*daN*)
- ✦ *k* est le coefficient de frottement de la courroie sur la jante.
- ✦ α est la mesure en radians de l'arc de contact de la courroie sur la petite poulie.

On suppose dans la suite que:

$$F = 10\,daN \text{ et } k = 0{,}25 = \frac{1}{4}$$

En posant $x = k\,\alpha$, l'étude de T en fonction de α mène à l'étude de la fonction:

$$f(x) = 10 \quad \frac{e^x}{e^x - 1}$$

A. Partie Mathématique

1. Etudier les variations de la fonction f pour x appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$. Calculer la limite de f lorsque x tend vers 0, puis sa limite lorsque x tend vers $+\infty$.
2. Tracer la courbe représentative C_f de f dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$, unités graphiques: 10cm sur l'axe des abscisses et 0,5 cm sur l'axe des ordonnées. Mettre en évidence les deux droites asymptotes de cette courbe.

B. Partie Mécanique

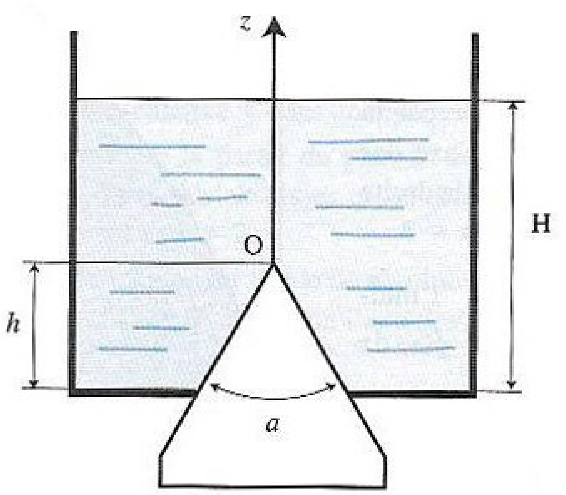
1. Calculer la valeur de T lorsque α =3 rad (soit environ 172°), puis lorsque α =2,8 rad (soit environ 160°). On donnera la valeur approchée de T avec deux décimales.
2. Mettre en évidence ces valeurs sur le graphique. En déduire dans quel intervalle varie T lorsque α varie entre 2,8 rad et 3 rad.

Problème: (8 points)

Le bouchon conique

On considère un récipient dont le fond est percé d'une ouverture circulaire. Cette ouverture est obturée par un bouchon conique. On s'intéresse à l'expression de la composante verticale de la résultante des forces exercées sur le bouchon par le liquide remplissant le récipient.

Présentation du schéma expérimental



La composante verticale, sur l'axe Oz, de la résultante des forces exercées sur le bouchon a pour expression, en fonction de *h*,

$$F(h) = -K\int_0^h (H-x)(h-x)\,dx$$

où *K* est une constante dont la valeur dépend de la nature du liquide et de l'angle a du cône.
Dans la suite, on prendra $K=35$, ce qui correspond à un récipient contenant de l'eau et à un cône dont l'angle a mesure 60°.
Lorsque $H=1$, *F(h)* s'exprime donc par:

$$F(h) = -35\int_0^h (1-x)(h-x)\,dx$$

On considérera que *h* appartient à l'intervalle [0,1].

1. Calculer l'expression polynomiale de $F(h)$.
2. On considère la fonction numérique *f* de la variable réelle *h*, définie sur [0,1] par:

$$f(h) = h^2 - \frac{h^3}{3}$$

   Étudier le sens de variation de la fonction *f* sur l'intervalle [0,1].
3. Tracer la courbe représentative de la fonction *f* dans un repère orthonormal (unité graphique: 6cm).
4. *Déduire de l'étude précédente, la valeur maximale, ainsi que la valeur minimale, de la valeur absolue* $|F(h)|$ *de la composante verticale de la résultante des forces exercées sur le bouchon.*