

## DEVOIR SURVEILLE n°1

## corrigé

## Exercice 1: (4 points)

1. L'ensemble des fonctions solutions sont de la forme  $y(x) = k e^{-\frac{x}{2}}$  avec  $k \in \mathbb{R}$

2.  $xy' + y = 0 \Leftrightarrow y' + \frac{1}{x}y = 0$  une primitive de  $-\frac{1}{x}$  étant  $-\ln x$  on trouve:

$$y(x) = k e^{-\ln x} = \frac{k}{x} \text{ avec } k \in \mathbb{R}$$

3. a)  $\frac{1-x}{1+x} = \frac{a(x+1)+b}{x+1}$  donc  $1-x = ax+a+b \Leftrightarrow x(a+1)+a+b-1=0$  d'où  $a=-1$  et  $b=2$

b)  $(x+1)y' + (x-1)y = 0 \Leftrightarrow y' + \frac{x-1}{x+1}y = 0$

On cherche une primitive de  $\frac{x-1}{x+1} = -1 + \frac{2}{x+1}$  (d'après a)) on trouve  $-x + 2 \ln(x+1)$

On a donc  $y(x) = k e^{-x+2 \ln(x+1)} = k e^{-x} e^{\ln(x+1)^2} = k(x+1)^2 e^{-x}$

## Exercice 2: (5 points)

1.  $4v' + v = 0 \Leftrightarrow v' + \frac{1}{4}v = 0$  l'ensemble des fonctions solutions sont de la forme  $y(x) = k e^{-\frac{x}{4}}$   $k \in \mathbb{R}$

2.  $u(x) = A e^{\frac{x}{2}} + B$  donc  $u'(x) = \frac{A}{2} e^{\frac{x}{2}}$

$u$  est solution de (E)  $\Leftrightarrow 4 \frac{A}{2} e^{\frac{x}{2}} + A e^{\frac{x}{2}} + B = 3 e^{\frac{x}{2}} - 1$  ce qui donne  $3 A e^{\frac{x}{2}} + B = 3 e^{\frac{x}{2}} - 1$

et on obtient  $A=1$  et  $B=-1$  et donc  $u(x) = e^{\frac{x}{2}} - 1$

3. L'équation (E) a donc pour solutions les fonctions de la forme:  $v(x) = e^{\frac{x}{2}} - 1 + k e^{-\frac{x}{4}}$

4.  $v(0) = 0 \Leftrightarrow 1 - 1 + k = 0 \Leftrightarrow k = 0$  La solution particulière est donc  $v(x) = e^{\frac{x}{2}} - 1$

## Exercice 3: (11 points)

1. a)  $y(x) = k e^{-x}$  avec  $k \in \mathbb{R}$

b)  $g(t) = k e^{-0,25t}$  donc  $g'(t) = -0,25 k e^{-0,25t}$

$$g' + g = e^{-0,25t} \Leftrightarrow -0,25 k e^{-0,25t} + k e^{-0,25t} = e^{-0,25t} \Leftrightarrow -0,25 k + k = 1 \Leftrightarrow k = \frac{1}{0,75} = \frac{4}{3}$$

donc  $g(x) = \frac{4}{3} e^{-0,25x}$  est une solution particulière de (E).

c) La solution générale est donc de la forme  $y(x) = \frac{4}{3} e^{-0,25x} + k e^{-x}$

$$d) y(0) = 20 \Leftrightarrow \frac{4}{3} + k = 20 \Leftrightarrow k = 20 - \frac{4}{3} = \frac{56}{3}$$

La solution particulière cherchée est donc  $y(x) = \frac{4}{3} e^{-0,25x} + \frac{56}{3} e^{-x}$

2. a)  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$  car  $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t} = 0$

b)  $f'(t) = \frac{1}{3} (-56 e^{-t} - e^{-0,25t})$

c)  $f'(t)$  est donc toujours négatif pour  $t \in [0; +\infty[$  ce qui donne le tableau de variation suivant:

$x$	$-\infty$	$+\infty$
signe de $f'$	-	
$f$	20	0


