

DM n°5

Le problème de la voile de bateau

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité graphique: 1 cm)

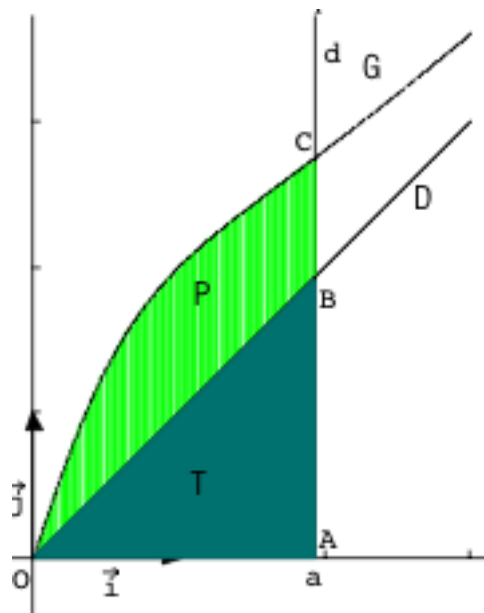
Dans ce repère, on a tracé ci-dessous la courbe G représentative de la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par:

$$g(x) = \frac{x^3 + 3x}{x^2 + 1}$$

On a également tracé ci-dessous la droite Δ d'équation $y=x$ et une droite d parallèle à l'axe des ordonnées. Cette droite d coupe l'axe des abscisses, la droite Δ et la courbe C_g respectivement aux points A, B et C de même abscisse a appartenant à l'intervalle $[1; 10]$.

La réunion des parties P et T représente à l'échelle 1/200^{ème} la voile d'un bateau.

Les parties P et T exigent des toiles différentes mais doivent avoir la même aire. Le but du problème est de choisir le nombre a de telle sorte que les autres parties P et T soient égales.

**A – Etude du bord supérieur de la voile**

- Vérifier que, pour tout nombre réel positif x :

$$g(x) = x + \frac{2x}{x^2 + 1}$$

- En déduire que la droite Δ est asymptote oblique à la courbe C_g .
 - Etudier la position de la courbe C_g par rapport à la droite Δ .

B – Calcul des aires de P et T

1. Calculer en fonction de a :

$$\int_0^a \frac{2x}{x^2+1} dx$$

2. Calculer, en fonction de a , l'aire en cm^2 du domaine délimité par la courbe C_g , l'axe des abscisses et la droite d'équation $x=a$.
3. Calculer, en fonction de a , l'aire en cm^2 de la partie T , puis en déduire l'aire de la partie P .

C – Détermination du nombre a

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par: $f(x) = \ln(x^2+1) - \frac{x^2}{2}$

1. a) Déterminer la dérivée f' de f sur $[0; +\infty[$.
 b) Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0; +\infty[$.
 c) Dresser le tableau de variation de f et déterminer la limite de f en $+\infty$.
2. a) Démontrer que dans l'intervalle $[1; 10]$ l'équation $f(x) = 0$ admet une solution notée α .
 Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α .

b) Démontrer que: $\ln(\alpha^2+1) = \frac{\alpha^2}{2}$

- c) En déduire que, pour cette valeur α , les aires des parties P et T sont égales et donner la solution du problème posé.