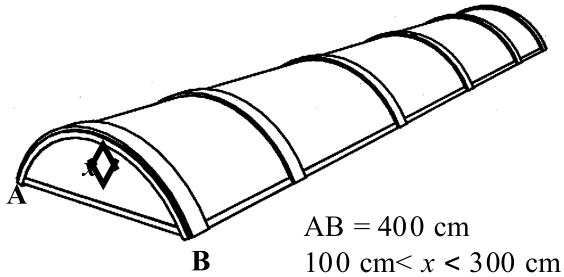
DM n°2

Etude d'une couverture cintrée

La figure ci-contre représente un système de couverture cintrée suivant un arc de cercle. L'objet de l'étude est de déterminer le rayon R de cet arc de cercle en fonction de la hauteur x (ou flèche) choisie. La largeur de la structure est fixée à 400 cm et sa hauteur x doit être comprise entre 100 cm et 300 cm.

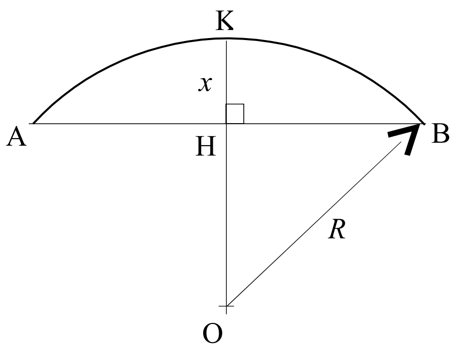


AB = 400 cm

100 cm< x < 300 cm

I. Étude de deux cas particuliers

Dans cette partie, on suppose que la flèche est plus petite que le rayon.
Le profil est alors schématisé dans le dessin ci-contre.



1. Le rayon de cintrage R étant fixé à 250 cm, calculer OH puis HK.

2. La hauteur étant fixée à x = 120 cm, on veut calculer le rayon de cintrage R. Pour cela:

a) En considérant la droite (OK), exprimer OH en fonction de R.

b) En utilisant le triangle rectangle OBH, montrer que :

$$R^2=(R-120)^2+40000 \qquad (1)$$

c) Résoudre l'équation (1) pour calculer R. *Le résultat sera arrondi au dixième*

II. Étude du cas général

On admet que le rayon de cintrage R est donné en fonction de la flèche x par la relation :

$$R=\frac{40000+x^2}{2x} \quad .$$

1. On considère la fonction f définie sur l'intervalle [100 ; 300] par $f(x)=\dfrac{40000+x^2}{2x}$

a) Montrer que $f(x)$ peut s'écrire sous la forme : $f(x)=\dfrac{20000}{x}+\dfrac{x}{2}$.

b) Calculer la dérivée f' de la fonction f.

Montrer que $f'(x)$ peut s'écrire sous la forme $f'(x)=\dfrac{x^2-40000}{2x^2}$.

Dans l'intervalle [100 ; 300], déterminer la valeur de x pour laquelle $f'(x)$ = 0.

c) En déduire le tableau de variations de f.

d) Tracer la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormal

2. Pour quelle valeur de x le rayon R est-il minimal ?