Dénombrement

I. Diagrammes, tableaux, arbres

voir feuille exercices.

II. Permutations

II.1. Un exemple :

On place 5 personnes sur 5 chaises différentes. Le nombre de permutations possibles est

$$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

On note ce nombre 5!

II.2. Propriété fondamentale :

Propriété 1

Le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments est

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times 2 \times 1$$

que l'on note $n!$ (se dit « factorielle n ») Par convention, on posera $0! = 1$

III. Combinaisons

III.1. Un exemple :

On joue au poker avec 52 cartes. Combien y-a-t-il de mains de 5 cartes possibles ?
Réponse :

$$\frac{52 \times 51 \times 50 \times 49 \times 48}{5!}$$

que l'on peut écrire aussi

$$\frac{52!}{47! \times 5!}$$

soit 2598960 possibilités.

III.2. Propriété fondamentale :

Propriété 2

Le nombre de combinaisons de p éléments parmi n éléments vaut :

$$\frac{n!}{(n-p)!p!}$$

Notation : on note ce résultat C_n^p ou bien $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$.

Exemple: Pour remplir une grille de loto, il faut cocher 6 cases sur 49. Combien y-a-t-il de grilles possibles ? Réponse : $C_{49}^{6} = 13983816$ grilles.

III.3. Propriété des C_n^p et triangle de Pascal :

$$C_n^0 = 1 \qquad C_n^n = 1 \qquad C_n^{n-p} = C_n^p \qquad C_{n+1}^{n-1} = C_n^{p+1} + C_n^p$$

Cette dernière relation permet de construire le triangle de Pascal :

1						
1	1					
1 +	2	1				
1	3	3	1			
1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1	
1	6	15	20	15	6	1

C_0^0						
C_1^0	C_1^1					
C_2^0	C_2^1	C_2^2				
C_3^0	C_3^1	C_3^2	C_3^3			
C_4^0	C_4^1	C_4^2	C_4^3	C_4^4		
C_5^0	C_5^1	C_5^2	C_5^3	C_5^4	C_5^5	
C_6^0	C_6^1	C_6^2	C_6^3	C_6^4	C_6^5	C_6^6