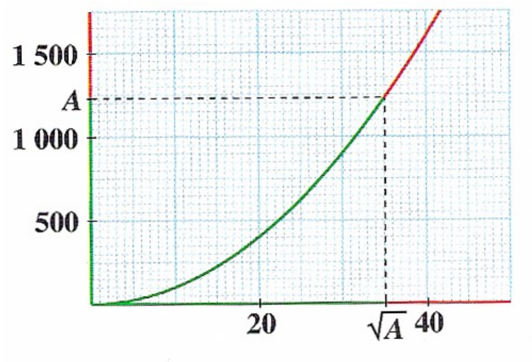
# LIMITES

## I DEFINITIONS

### 1. Limite d'une fonction en $+\infty$

*Exemple 1:* $f(x)=x^2$

**Approche graphique**




**Approche numérique**

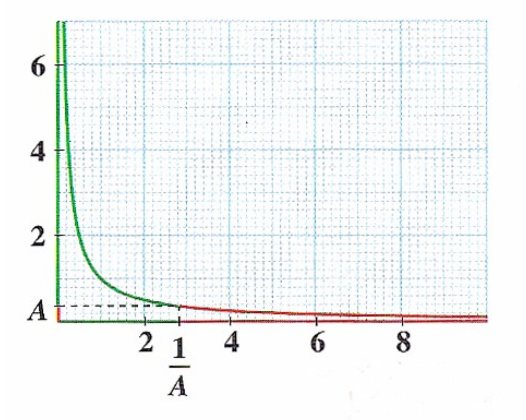
| $x$ | 1000 | 10000 | $10^{10}$ | $10^{100}$ |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)=x^2$ | 1000000 | 100000000 | $10^{20}$ | $10^{200}$ |

On voit que plus *x* est grand, plus son image est grande. Plus précisément, *f(x)* est plus grand que n'importe quel nombre *A* dès que *x* est plus grand que $\sqrt{A}$ .

On note: $\lim\limits_{+\infty} x^2=+\infty$

*Exemple 2:* $g(x)=\dfrac{1}{x}$

**Approche graphique**




**Approche numérique**

| $x$ | 1000 | 10000 | $10^{10}$ | $10^{100}$ |
|---|---|---|---|---|
| $g(x)=\dfrac{1}{x}$ | 0,001 | 0,0001 | $10^{-10}$ | $10^{-100}$ |

On voit que plus *x* est grand, plus son image se rapproche de 0. Plus précisément, g(x) est comprise en tre 0 et n'importe quel nombre *A*, dès que *x* est plus grand que $\dfrac{1}{A}$ .

On note: $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{1}{x}=0$

Propriété:

$\lim\limits_{+\infty} \sqrt{x}=+\infty$ $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}}=0$ $\lim\limits_{+\infty} x^n=+\infty$ $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{1}{x^n}=0$ $(n \in \mathbb{N},\ n\geqslant 1)$

## 2. Limite d'une fonction en -∞

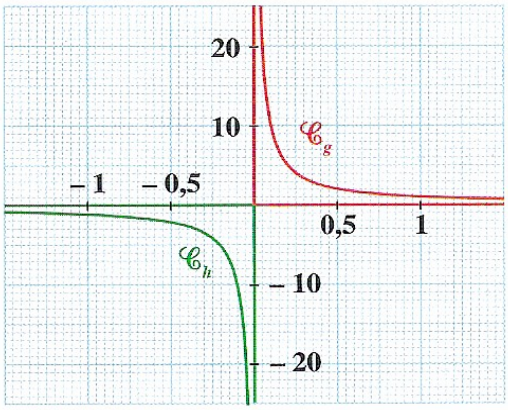
Propriété:

si n est pair, $\lim\limits_{-\infty} x^n = +\infty$ si n est impair, $\lim\limits_{-\infty} x^n = -\infty$ $\lim\limits_{-\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ (n $\in \mathbb{N}$ , $n \geqslant 1$ )

## 3. Limite d'une fonction en 0

*Exemple :* $g(x) = \frac{1}{x}$

| Approche graphique | Approche numérique |
|---|---|




| $x$ | 0,001 | 0,0001 | $10^{-10}$ | $10^{-100}$ |
|---|---|---|---|---|
| $g(x) = \frac{1}{x}$ | 1000 | 10000 | $10^{10}$ | $10^{100}$ |

| $x$ | -0,001 | -0,0001 | - $10^{-10}$ | - $10^{-100}$ |
|---|---|---|---|---|
| $g(x) = \frac{1}{x}$ | -1000 | -10000 | - $10^{10}$ | - $10^{100}$ |

On note: $\lim\limits_{0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

Propriété:

si n est pair, $\lim\limits_{0^-} \frac{1}{x^n} = +\infty$ si n est impair, $\lim\limits_{0^-} \frac{1}{x^n} = -\infty$ $\lim\limits_{0^-} \frac{1}{x^n} = +\infty$ (n $\in \mathbb{N}$ , $n \geqslant 1$ )

## 4. Limite d'une fonction en un réel a

Définition:
Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et a un réel. On appelle limite de f en a, et on note $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ , la limite définie par:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} f(a+h)$$

*Exemple: Soit f la fonction définie sur ]3;+∞[ par* $f(x) = \frac{1}{x-3}$

*Pour étudier* $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ *, on pose* $x = 3+h$ *où h ∈ ]0;+∞[ et on obtient*

$f(3+h) = \frac{1}{3+h-3} = \frac{1}{h}$ *donc* $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \lim\limits_{h \to 0^+} \frac{1}{h} = +\infty$

## II OPERATIONS SUR LES LIMITES

### 1. Limite d'une somme

| *limg / lim f* | *l* | +∞ | -∞ |
|---|---|---|---|
| *l'* | *l+l'* | +∞ | -∞ |
| +∞ | +∞ | +∞ | ? |
| -∞ | -∞ | ? | -∞ |

*Exemples:*

$\lim\limits_{x\to+\infty} x+\dfrac{1}{x^2}-1=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} x-1=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2}=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^3+x+15=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x+15=+\infty$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2}+3x-4=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} 3x-4=-4$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^3+x+15=+\infty$ (forme indéterminée)

Dans ce dernier cas, on parle de forme indéterminée.

### 2. Limite d'un produit

| *limg / lim f* | $l\neq 0$ | +∞ | -∞ |
|---|---|---|---|
| $l'\neq 0$ | $l\,l'$ | ±∞ | ±∞ |
| +∞ | ±∞ | +∞ | -∞ |
| -∞ | ±∞ | -∞ | +∞ |

*Exemples:*

$\lim\limits_{x\to+\infty} (-5x^2)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} -2x(x+3)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x}(3x+\sqrt{x})$ (forme indéterminée)

### 3. Limite d'un quotient

| *limg / lim f* | *l* | +∞ | -∞ |
|---|---|---|---|
| $l'\neq 0$ | *l/l'* | ±∞ | ±∞ |
| +∞ | *0* | ? | ? |
| -∞ | *0* | ? | ? |

Si $l'=0$ et $l\neq 0$, alors le quotient $\frac{f}{g}$ tend vers $\pm\infty$

*Exemples:*

$\lim_{x\to-\infty} -\frac{3}{2x^2+3}=0$

$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x(x-2)}=-\infty$

LES 4 FORMES INDETERMINEES

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0*∞ | $\frac{0}{0}$ | $\frac{\infty}{\infty}$ | ∞-∞ |

## III ASYMPTOTES

1. **Asymptote horizontale**
   Si $\lim_{x\to+\infty} = k$ (resp. $\lim_{x\to-\infty} = k$),on dit que la droite d'équation $y=k$ est une asymptote horizontale à la courbe $C_f$ en +∞ (resp. en -∞)

   Exemple: $\lim_{x\to+\infty} 2+\frac{1}{x}=2$

2. **Asymptote verticale**
   Si une fonction f admet une limite infinie en un réel a, alors on dit que la droite d'équation $x=a$ est une asymptote verticale à la coure $C_f$

   Exemple: $\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2}=+\infty$

3. **Asymptote oblique**
   S'il existe une droite d'équation $y=ax+b$ telle que $\lim_{x\to+\infty} (f(x)-(ax+b))=0$ alors la droite D est dite asymptote oblique à la courbe $C_f$ en +∞. (Même définition en -∞)

   Exemple: $f(x)=x-1+\frac{1}{x+2}$

   $\lim_{x\to+\infty} f(x)-(x-1)=0$ donc $y=x-1$ est asymptote oblique à $C_f$ en +∞.

## IV LIMITES ET INEGALITES

Soient *f, u* et *v* des fonctions définies sur un intervalle du type [a;+∞[

- Si, pour tout *x* de *I*, $f(x)\geqslant u(x)$ et si $\lim_{x\to+\infty} u(x)=+\infty$, alors $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$
- Si, pour tout *x* de *I*, $f(x)\leqslant v(x)$ et si $\lim_{x\to+\infty} v(x)=-\infty$, alors $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$
- Si, pour tout *x* de *I*, $v(x)\leqslant f(x)\leqslant u(x)$ et si $\lim_{x\to+\infty} v(x)=\lim_{x\to+\infty} u(x)=L$, alors $\lim_{x\to+\infty} f(x)=L$
- Si, pour tout *x* de *I*, $|f(x)-L|\leqslant u(x)$ et si $\lim_{x\to+\infty} u(x)=0$, alors $\lim_{x\to+\infty} f(x)=L$
- Si, pour tout *x* de *I*, $f(x)\leqslant u(x)$ et si $\lim_{x\to+\infty} f(x)=L$, et $\lim_{x\to+\infty} u(x)=L'$, alors $L\leqslant L'$
  (*L* et *L'* désignent des nombres réels)

  Théorèmes analogues pour les limites en -∞ et en a.

*Exemples:*
*Soit f(x)=-x+sin  x . Calculer* $\lim_{x\to+\infty} f(x)$
$f(x)\leqslant -x+1$ *donc...*

**V LIMITE D'UNE FONCTION COMPOSEE**

Théorème:
Soit *v* une fonction dééfinie sur un intervalle *I* dans un intervalle *J* et *u* une fonction définie sur *J*.
Si $\lim_{x\to a} v(x)=b$ et $\lim_{x\to b} u(x)=c$ , alors $\lim_{x— a} u(v(x))=c$ , où a, b et c sont des réels, ou +∞, ou -∞.

*Exemple: Soit f la fonction définie sur ]-∞,1] par* $f(x)=\sqrt{-x+1}$ *. On sait que* $\lim_{x\to-\infty}(-x+1)=+\infty$ *. On en déduit que* $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{-x+1}=+\infty$