INTEGRALES

I Définition de l'intégrale

<u>Définition:</u> Soit f une fonction dérivable sur un intervalle *I.*

On appelle intégrale de *a à b* de *f et on note* $\int_a^b f(x)\,dx$ le nombre réel défini par $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

où F est une primitive de *f* sur I.

Remarque: si F et G sont deux primitives de I, $F(b)-F(a)=G(b)-G(a)$ ce qui justifie la définition.

La lettre x dans la notation $\int_a^b f(x)\,dx$ est « variable muette », on peut la remplacer par n'importe quelle autre lettre.

Exemple: $I=\int_1^2 (x^2+3x)\,dx$ *On cherche une primitive de* x^2+3x

$F(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}$ *d'où* $I=\int_1^2 (x^2+3x)\,dx=\left[\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}\right] = \frac{8}{3}+6-\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{2}\right)= \frac{41}{6}$

II Le point de vue graphique

<u>Théorème:</u>

Soit f une fonction dérivable et positive sur un intervalle I, de courbe représentative C_f dans un repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$. L'aire, exprimée en unités d'aires, de la partie du plan limitée par C_f, l'axe des abscisses et les droites verticales $x=a$ et $x=b$ est égale à:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

III Propriétés de l'intégrale

Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I. a,b, et c trois réels quelconques. $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Linéarité: $\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx$ et $\int_a^b \lambda f(x)\,dx=\lambda\int_a^b f(x)\,dx$
- Ordre des bornes: $\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx$
- Relation de *Chasles*: $\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx$
- Positivité: Si pour tout x de [a,b], f(x) est positif alors $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$
- Ordre: Si pour tout x de [a,b], $f(x)\geqslant g(x)$ alors $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b g(x)\,dx$

IV Valeur moyenne

1. Définition:

Soit *f* une fonction dérivable sur un intervalle [a,b]. On appelle valeur moyenne de *f* sur [a,b] le nombre μ défini par: $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$

Exemple: Soit *f* définie par $f(t) = \sin t$. La valeur moyenne de *f* sur $[0,\pi]$ est alors:

$$\mu = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin t dt = \frac{1}{\pi}[-\cos t] = \frac{2}{\pi}$$

2. Inégalité de la moyenne

Soit f une fonction dérivable sur [a,b] telle que pour tout x de [a,b] $m \leqslant f(x) \leqslant M$

Alors on a: $$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a)$$

Interprétation graphique: Soit *D* la droite d'équation y=μ.

Alors l'aire de la partie située au-dessus de *D* est égale à l'aire de la partie située en dessous de *D.*

V Calcul de volumes

1. Cas général

<u>Théorème:</u>

Dans l'espace $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$, on considère un solide limité par deux plans parallèles au plan $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ le plan de cote *a* (d'équation $z = a$) et le plan de cote *b* (d'équation $z = b$).

On note *S(z)* l'intersection du solide avec tout plan parallèle à $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ de cote *z*.

Alors le volume du solide en unités de volumes est:

$$V = \int_a^b S(z)\,dz$$

2. Volume de révolution

<u>Théorème:</u>

Dans le plan $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$, on considère une partie du plan limitée par une courbe d'équation $y = f(x)$, l'axe (Ox), et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$. En tournant autour de l'axe (Ox), cette partie du plan engendre un solide de révolution dont le volume en unités de volume est:

$$V = \pi\int_a^b (f(x))^2\,dx$$