

NOMBRES COMPLEXES

I Généralités

1. Définition:

On appelle nombre complexe tout nombre de la forme $z = \dots\dots\dots$ où a et $b \in \mathbb{R}$ et où la quantité i vérifie la relation $\dots\dots\dots$

Quand le nombre complexe est écrit sous la forme $z = a + ib$, on dit que c'est la forme $\dots\dots\dots$

Le réel a est alors appelé $\dots\dots\dots$ du nombre complexe $a + ib$ et on note $a = \dots\dots\dots$

Le réel b est alors appelé $\dots\dots\dots$ du nombre complexe $a + ib$ et on note $b = \dots\dots\dots$

L'ensemble des nombres complexes est noté $\dots\dots\dots$

Remarque: L'ensemble des nombres réels est $\dots\dots\dots$ dans l'ensemble des nombres complexes.

Par exemple, le réel 1 peut s'écrire $1 = \dots\dots\dots$

2. Calculs en écriture algébrique

Théorème: Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes. Alors:

$$z + z' = \dots\dots\dots$$

$$z - z' = \dots\dots\dots$$

$$z \cdot z' = \dots\dots\dots$$

Si $z' \neq 0$ alors $\frac{z}{z'} = \dots\dots\dots$

Exercice 1: Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants:

$$Z_1 = (1+i)(2-3i) - 3(4i)(3i+1) + (1+i)^2$$

$$Z_2 = \frac{2i}{(1+i)^2}$$

$$Z_3 = \frac{1+3i}{3-2i}$$

$$Z_4 = \frac{1}{2-i}$$

3. *Conjugué d'un nombre complexe*

Définition: Soit $z = a + ib$ un nombre complexe. On appelle nombre complexe conjugué de z le nombre complexe, noté défini par

4. *Interprétations géométriques*

Définition: Dans un repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$ orthonormal du plan, on appelle du point $M(a;b)$ le nombre complexe $z = a + ib$

Le plan complexe est la représentation des nombres complexes sous la forme d'un plan. Dans ce plan, l'axe des abscisses représente l'ensemble des et l'axe des ordonnées représente l'ensemble des

Exercice: Dans le plan complexe, muni du repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$ orthonormal, placer les points d'affixe:

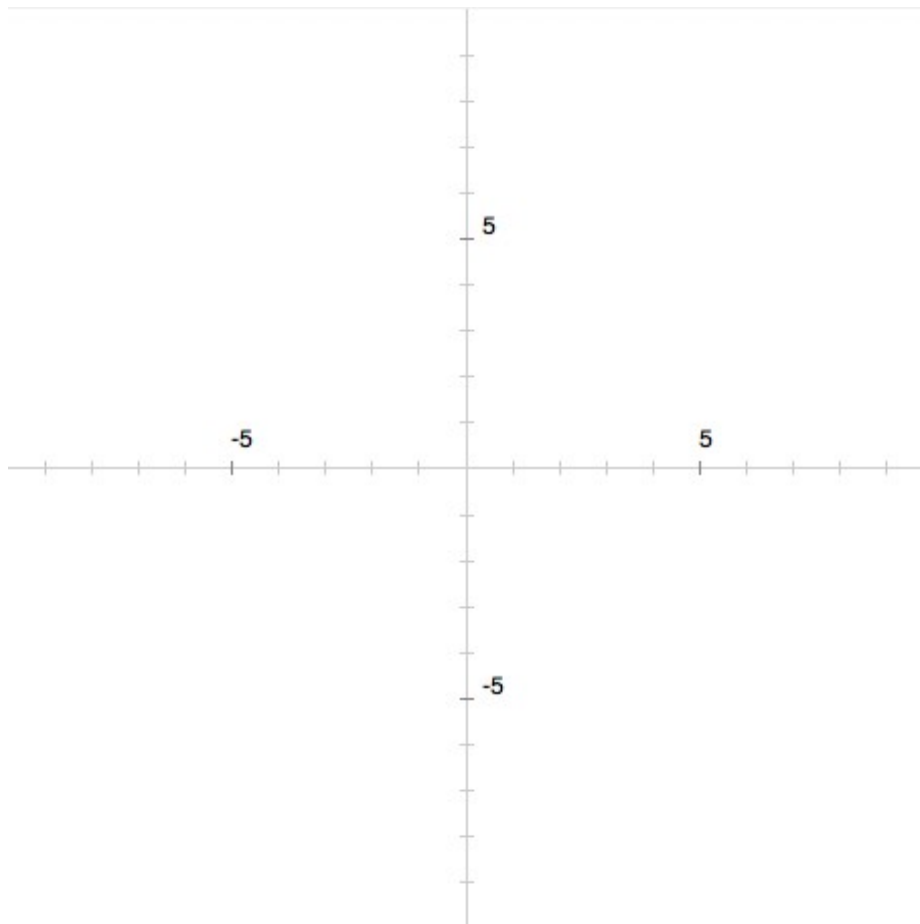
$$z_1 = 3 + 2i$$

$$z_2 = i + 4$$

$$z_3 = -2i$$

$$z_4 = -4 - 5i$$

$$z_5 = -4$$



Proposition 1: Si $z = a + ib$ est l'affixe d'un point $M(a; b)$ du plan, le conjugué de z est l'affixe du

.....

Proposition 2: Si $z = a + ib$ est l'affixe d'un point $M(a; b)$ du plan, et si $z' = a' + ib'$ est l'affixe d'un point $M'(a'; b')$ du plan, alors le nombre complexe $z' - z$ est l'affixe du vecteur

II Module d'un nombre complexe

1. Module d'un nombre complexe

Définition: Soit $z = a + ib$ un nombre complexe. On appelle module de z le nombre réel, noté $|z|$, défini par $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Proposition: Soit $z = a + ib$ un nombre complexe. Alors on a la relation:

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2$$

Exercice: Calculer les modules des nombres complexes suivants:

$z_1 = 3 + 2i$	$z_2 = i + 4$	$z_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$
$z_4 = -2i$	$z_5 = -4$	$z_6 = -4 - 5i$
$z_7 = -6$	$z_8 = 5$	$z_9 = -5 + \frac{i}{2}$

2. Interprétation géométrique du module d'un nombre complexe

Proposition: Soit $(O; \vec{u}; \vec{v})$ un repère orthonormal du plan complexe. Soit $z = a + ib$ un nombre complexe affixe d'un point $M(a; b)$ du plan complexe. Alors on a:

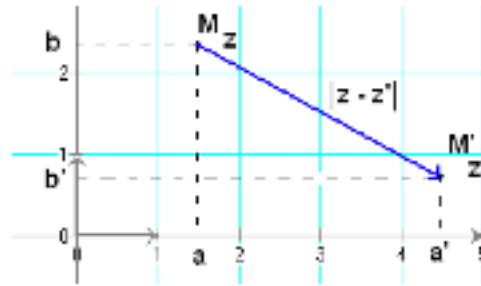
$$|z| = \|\vec{OM}\| = OM$$

Remarque: un module est une distance, c'est donc toujours un nombre positif ou nul.

3. Interprétation géométrique du module d'une différence de deux nombres complexes

Proposition: Soit $(O; \vec{u}; \vec{v})$ un repère orthonormal du plan complexe. Soit $z = a + ib$ un nombre complexe affixe d'un point $M(a; b)$ du plan complexe, et $z' = a' + ib'$ un nombre complexe affixe d'un point $M'(a'; b')$ du plan complexe. Alors on a:

$$|z - z'| = \|\vec{MM'}\| = MM'$$



4. Propriétés du module

Théorème: Soient z et z' deux nombres complexes. Alors on a les propriétés suivantes:

$$|-z| = |z|$$

$$|\bar{z}| = |z|$$

$$|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$$

$$\text{Si } z' \neq 0, \quad \left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$$

$$|z + z'| < |z| + |z'| \quad (\text{inégalité triangulaire})$$

III Argument d'un nombre complexe

Définition: Soit $(O; \vec{u}; \vec{v})$ un repère orthonormal du plan complexe, orienté dans le sens trigonométrique. Soit $z = a + ib$ un nombre complexe non nul, affixe d'un point M du plan. On appelle argument de z tout nombre réel, noté $\arg(z)$, tel que $\arg(z)$ soit une mesure (en radians) de l'angle orienté $(\vec{u}; \overrightarrow{OM})$



Remarque: un nombre complexe possède une infinité d'arguments. Le nombre complexe 0 n'a pas d'argument, mais son module est nul.

Théorème: Soient z et z' deux nombres complexes non nuls et soient $\arg(z)$ et $\arg(z')$ leurs arguments respectifs. Alors on a les propriétés suivantes:

$$\arg(-z) = \arg(z) + \pi$$

$$\arg(\bar{z}) = -\arg(z)$$

$$\arg(z \cdot z') = \arg(z) + \arg(z')$$

$$\text{si } z' \neq 0, \quad \arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$$

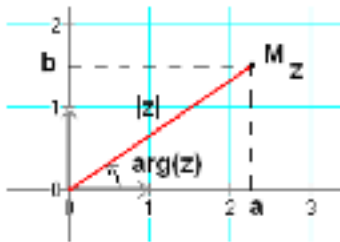
IV Notation exponentielle d'un nombre complexe

Théorème: Soit $z = a + ib$ un nombre complexe non nul dont le module est $r = |z|$ et un argument est $\theta = \arg(z)$.

$$\text{Alors } \cos \theta = \frac{a}{r} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{b}{r} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{et donc: } z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

Notation: $z = r e^{i\theta}$ cette écriture est appelée notation exponentielle de z .

Nombres complexes	Points du plan
Ecriture algébrique $z = a + ib$	Coordonnées cartésiennes $M(a; b)$
Ecriture trigonométrique $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ Ecriture exponentielle $z = r e^{i\theta}$	Coordonnées polaires $M(r; \theta)$



Propriétés:

$$(r e^{i\theta})(r' e^{i\theta'}) = (rr') e^{i(\theta + \theta')}$$

$$(r e^{i\theta})^n = r^n e^{i\theta n}$$

$$\frac{r e^{i\theta}}{r' e^{i\theta'}} = \frac{r}{r'} e^{i(\theta - \theta')}$$

V Formules de Moivre et d'Euler

1. Formule de Moivre

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

2. Formule d'Euler

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

VI Applications des nombres complexes

1. Résolution des équations réelles du second degré

Théorème: Soit l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$. On pose $\Delta = b^2 - 4ac$

Si $\Delta > 0$, alors l'équation admet deux solutions réelles distinctes

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Si $\Delta = 0$, alors l'équation admet une unique solution réelle

$$z_0 = -\frac{b}{2a}$$

Si $\Delta < 0$, alors l'équation admet deux solutions complexes conjuguées

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Exercice: Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes:

$$z^2 - z + 3 = 0$$

$$-z^2 + z - 5 = 0$$

$$z^2 = -1$$

$$z^2 - z - 1 = 0$$

$$\frac{1}{2}z^2 - 4z + 10 = 0$$

$$z^4 + z^2 + 1 = 0 \quad (\text{Poser } Z = z^2 \dots)$$

2. Linéarisation de polynômes trigonométriques

(voir exercices)