Loi normale (dite de Laplace-Gauss)

I. Cas général

I.1. Définition :

Définition 1

Une variable aléatoire **continue** *X suit une loi normale de paramètres m et σ lorsque pour tout $k \in \mathbb{R}$*

$$P(X = k) = \int_{-\infty}^{k} f(x)dx$$

avec la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} \quad \sigma \geq 0 \quad et \quad m \in \mathbb{R}.$$

Elle est notée $\mathcal{N}(m, \sigma)$ et on montre que sa variance et son écart-type vérifient :

$$E(X) = m \qquad V(X) = \sigma^2 \qquad \text{et} \qquad \sigma(X) = \sigma$$

I.2. Etude des variations de la fonction f

On remarque que $f(x + m) = f(x - m)$

La courbe C_f présente donc une symétrie par rapport à l'axe vertical d'équation $x = m$.

On a $f'(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right) 2 \cdot \left(\dfrac{x-m}{\sigma}\right)^1 \cdot \dfrac{1}{\sigma}$, du signe opposé à $(x - m)$. d'où le tableau de variations :

x	$-\infty$		m		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\dfrac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}}$	$\searrow$	0

II. Loi normale centrée réduite

II.1. Définition

On appelle *loi normale centrée réduite* la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$ de paramètres $m = 0$ et $\sigma = 1$. Et on a le théorème suivant, qui permet de ramener l'étude de toute loi normale à l'étude de la loi normale centrée réduite.

Théorème 1

Si une variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$, alors la variable aléatoire $T = \dfrac{X - m}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$.

La densité de probabilité de cette loi, et la fonction de répartition sont données par :

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}, \qquad \text{et} \qquad P(T \leq t) = \Pi(t) = \int_{-\infty}^{t} f(t)\, dt$$

alors qu'espérance, variance et écart-type sont donnés par

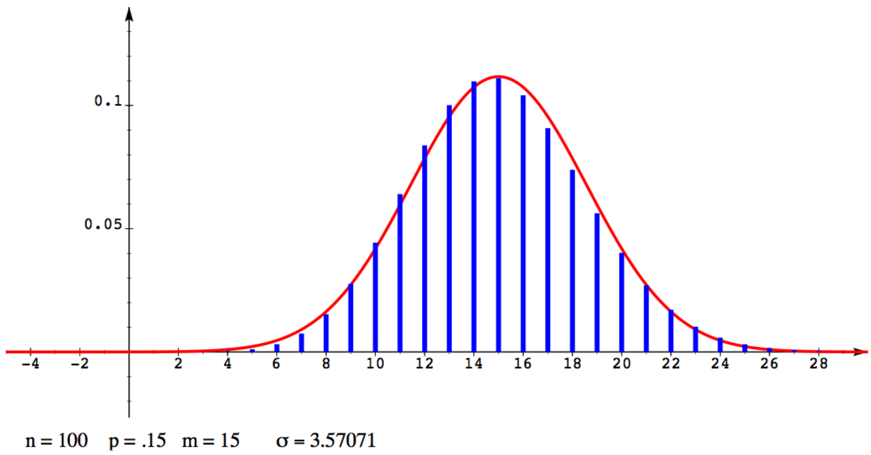
$$E(T) = 0 \qquad V(T) = 1 \qquad \sigma(T) = 1$$

II.2. Exemples

1. Calcul de $P(T \leq 1,67) = \Pi(1,67)$
2. Calcul de $P(T \geq 1,25) = 1 - \Pi(1,25)$
3. Calcul de $P(T \leq -1,67) = 1 - \Pi(1,67)$
4. Calcul de $P((t_1 \leq T \leq t_2)$
5. Calcul dans le cas particulier où $t_1 = -t_2$

III. Approximation d'une loi binômiale par une loi normale

Si n est "grand" et p ni "trop proche de 0", ni "trop proche de 1", alors la loi $\mathcal{B}(n,p)$ est très proche de la loi $\mathcal{N}(m,\sigma)$ où $m = np$ et $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$. La moyenne et l'écart-type sont conservés.



Approximation de la loi $\mathcal{B}(100; 0,15)$ par la loi $\mathcal{N}(15, \sqrt{100 \times 0,15 \times 0,85})$