LA FONCTION LOGARITHME NEPERIEN

I Définition:

La fonction logarithme népérien est LA primitive de la fonction $f(x)=\frac{1}{x}$ sur]0,+∞[, qui prend la valeur 0 en 1.

Le logarithme népérien de x est noté *ln x.*

II Propriétés immédiates:

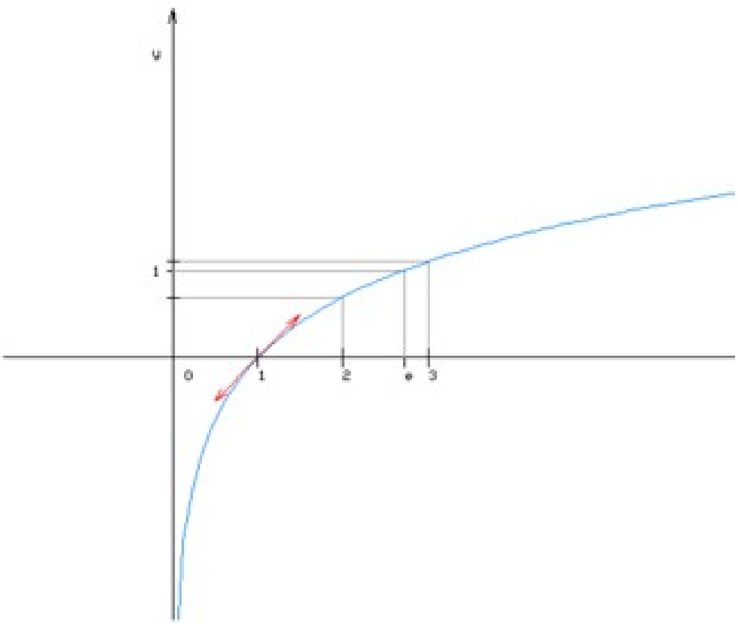
Df =]0,+∞[$\quad\quad$ $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ $\quad\quad$ $\ln 1 = 0$

III Représentation graphique:

Sur]0,+∞[, la fonction ln est *strictement croissante sur*]0;+∞[.

x	0 $+\infty$
signe de f'	+
f	$-\infty$ ↗ $+\infty$

$\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$ (asymptote verticale en 0) $\quad\quad$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ $\quad\quad$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$



Remarque: Il existe un réel, noté e, tel que $\ln e = 1$

IV Propriétés algébriques

$\ln ab = \ln a + \ln b$

démonstration: Soit a>0. posons $g(x) = \ln(ax) - \ln a - \ln x$ *g'(x)=0 donc g est constante. Or g(1)=0 donc g est nulle. D'où* $\ln(ax) = \ln a + \ln x$

$ln \ \frac{1}{b} = -\ln b$

démonstration: ln(b/b)=0=ln $\frac{1}{b}$ *+lnb*

$ln \ \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$

$ln \ a^p = p \ln a$

$ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$

$\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$
$\ln a > \ln b \Leftrightarrow a > b$

$\ln x > 0 \quad \Leftrightarrow x > 1$

$\ln x < 0 \quad \Leftrightarrow 0 < x < 1$

Exercices:

1. Simplifier:

   a) $\ln\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) + \ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$

   b) $4\ln(\sqrt{2}+1) - 4\ln(\sqrt{2}-1) - 5\ln 2$

2. Résoudre les équations:

   a) $\ln(x+1) + \ln(x+3) = \ln(x+7)$

   b) $(\ln x)^2 - \ln x - 42 = 0$

3. Résoudre l'inéquation:

   $\ln\left(\frac{x+1}{3\mathrm{x}-5}\right) \geqslant 0$