

Intégration

I. Définition de l'intégrale

Définition 1

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I . On appelle **intégrale** de a à b et on note

$\int_a^b f(x)dx$ le nombre réel défini par

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

où F est une primitive de f sur I .

Remarque: si F et G sont deux primitives de f sur I , $F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$ ce qui justifie la définition. La lettre x dans la notation $\int_a^b f(x)dx$ est "variable muette", on peut la remplacer par n'importe quelle autre lettre.

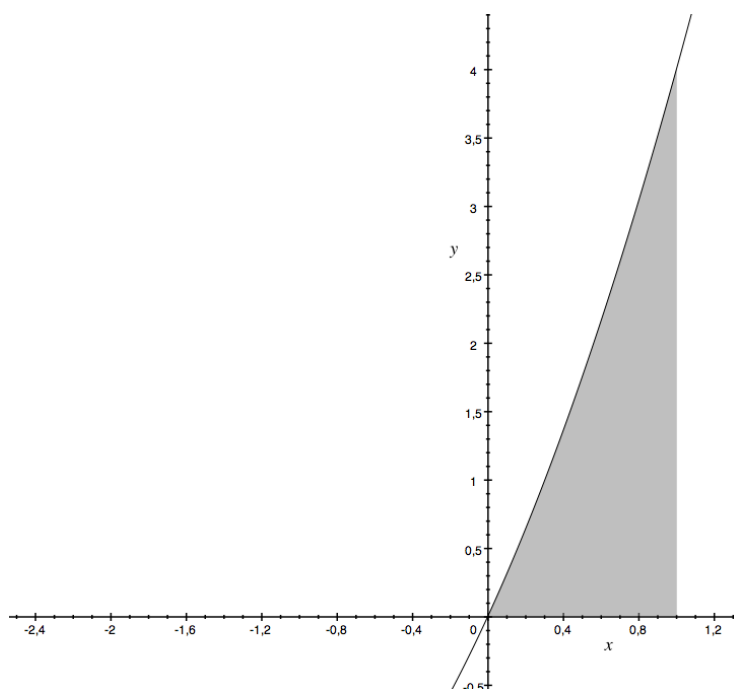
Exemple: Calculer $I = \int_0^1 x^2 + 3x dx$

II. Le point de vue graphique

Théorème 1

Soit f une fonction dérivable et positive sur un intervalle I , de courbe représentative C_f dans un repère. L'aire, exprimée en unités d'aires, de la partie du plan limitée par C_f , l'axe des abscisses et les droites verticales $x = a$ et $x = b$ est égale à :

$$\int_a^b f(x)dx$$



III. Propriétés de l'intégrale

Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I . a , b , et c trois réels quelconques, $\lambda \in \mathbb{R}$.

– Linéarité :

$$\int_a^b f(x) + g(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \quad \text{et} \quad \int_a^b \lambda f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx$$

– Ordre des bornes :

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

– Relation de Chasles :

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$$

– Positivité :

Si pour tout $x \in [a, b]$, $f(x)$ est positif alors $\int_a^b f(x) dx \geq 0$

– Ordre :

Si pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) \leq g(x)$ alors $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$

IV. Valeur moyenne

Définition 2

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[a, b]$. On appelle **valeur moyenne de f sur $[a, b]$** le nombre défini par

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

Exemple: Soit f définie par $f(t) = \sin t$. Calculer la valeur moyenne de f sur $[0, \pi]$.

Remarque: Soit D la droite d'équation $y = \mu$. On retrouve graphiquement une interprétation de la moyenne.