Corrigé DM n°1

1. On détermine l'aire du domaine par différence:

   On note A_1 l'aire du demi-disque de diamètre [AB] : $A_1=\left(\frac{\pi}{2}\right)3^2=\frac{9\pi}{2}$

   On note A_2 l'aire du demi-disque de diamètre [AM] : $A_2=\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{x}{2}\right)^2=\frac{\pi x^2}{8}$

   On note A_3 l'aire du demi-disque de diamètre [MB] : $A_3=\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{6-x}{2}\right)^2=\frac{\pi(6-x)^2}{8}$

   $$A(x)=A_1-(A_2+A_3)$$

   $$A(x)=\frac{9\pi}{2}-\left(\frac{\pi x^2}{8}+\frac{\pi(6-x)^2}{8}\right)=\frac{\pi}{8}(36-(x^2+(6-x)^2))=\frac{\pi}{8}(-x^2+12x-x^2)$$

   $$A(x)=\frac{\pi}{8}(-2x^2+12x)=\frac{\pi}{4}(6x-x^2)$$

2. $A'(x)=\frac{\pi}{4}(6-2x)=\frac{\pi}{2}(3-x)$ et donc *A'(x)* est positif pour $x\leqslant 3$ et négatif pour $x\geqslant 3$.

   La fonction *A* est donc croissante sur]0,3] et décroissante sur [3,6[

3. La question précédente nous donne le tableau de variation suivant:

x	0		3		6
signe de A'		+		-	
A			$A(3)$		
	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

   $A(3)=\frac{\pi}{4}(18-3^2)=\frac{9\pi}{4}$ Le maximum de l'aire *A(x)* est atteint en *x=3* et vaut $\frac{9\pi}{4}$.

   En *x=3* le point *M* se trouve au milieu du segment *[AB]*.

4. D'après 1. on a $A(x)=\frac{\pi}{4}(6x-x^2)$. Si O est le milieu de [AB], alors $OM+x=3$ d'où

   $x=3-OM$ et en remplaçant dans l'expression de $A(x)$:

   $$A(x)=\frac{\pi}{4}(6(3-0M)-(3-OM)^2)=\frac{\pi}{4}(18-6OM-9+6OM-OM^2)=\frac{\pi}{4}(9-OM^2)$$

   Donc le maximum de *A(x)* est atteint lorsque *OM* est le plus petit possible, c'est à dire *OM=0* donc lorsque M est confondu avec le point O.