Nombres complexes

I. Présentation de l'ensemble des nombres complexes

Définition 1

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes existe un imaginaire i qui vérifie $i^2 = -1$. Tout nombre complexe est un nombre de la forme $a + bi$, où a et b sont deux nombres réels. L'addition et la multiplication dans $\mathbb{C}$ suivent les mêmes règles que dans $\mathbb{R}$, en tenant compte du fait que $i^2 = -1$.

II. Forme algébrique d'un nombre complexe

Définition 2

L'écriture d'un nombre complexe sous la forme $z = a + bi$ s'appelle la **forme algébrique** *de z.*
a est la partie réelle de z. On note $a = \mathcal{R}e(z)$.
b est la partie imaginaire de z. On note $b = \mathcal{I}m(z)$.

Le nombre complexe $3 + 5i$ a pour partie réelle 3 et pour partie imaginaire 5.

Remarque: Les nombres complexes sont très utilisés en électricité. Pour éviter tout confusion avec l'intensité i, le nombre i est noté j en physique.
Un nombre complexe dont la partie imaginaire est nulle est dit **réel**.
Un nombre complexe dont la partie réelle est nulle est dit **imaginaire pur**.
L'ensemble des réels est inclus dans l'ensemble des complexes.

Exemple: $z = -8i$ est imaginaire pur, $z = 4 + 0i = 4$ est réel.

III. Calcul dans $\mathbb{C}$

III.1. Egalité de deux nombres complexes

Définition 3

Deux nombres complexes sont égaux s'ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire.

$$a + bi = a' + b'i \quad \Leftrightarrow \quad a = a' \quad \textit{et} \quad b = b'$$

Exemple: Chercher tous les réels x et y tels que $(x - 2) + (y - 1)i = 2 - 3i$

III.2. Addition des nombres complexes

Définition 4

On définit dans $\mathbb{C}$ une opération appelée addition notée + par :

$$(a + bi) + (a' + b'i) = (a + a') + (b + b')i$$

Exemple: $z = 5 + 3i$ et $z' = -2 + i$. Calculer $z + z'$.

III.3. Multiplication des nombres complexes

Définition 5

On définit dans $\mathbb{C}$ une opération appelée multiplication notée $\times$ par :

$$(a+bi)\times(a'+b'i)=(aa'-bb')+(ab'+a'b)i$$

Exemple: $z=5+3i$ et $z'=-2+i$. Calculer zz' et z^2. Calculer i^2, i^3, i^4.

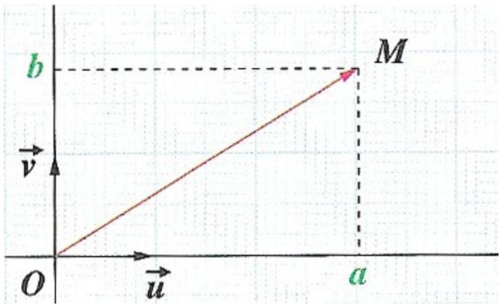
III.4. Représentation graphique d'un nombre complexe

Le plan étant rapporté à un repère orthonormal $(O,\vec{u},\vec{v})$, tout nombre complexe $z=a+bi$ est associé :

- soit au point M de cordonnées (a,b)
- soit au vecteur $\overrightarrow{OM}$ de coordonnées (a,b)

On dit que :

- z est l'affixe du point M ou du vecteur $\overrightarrow{OM}$
- M est le point image de z
- $\overrightarrow{OM}$ est le vecteur image de z



Exemple: Placer dans un repère les points A, B et C d'affixes respectives $-1+2i$, 5 et $3i$. Représenter le vecteur $\vec{u}$ d'affixe $2+3i$.

Remarque:
- L'axe (Ox) des abscisses est appelé **l'axe des réels**
- L'axe (Oy) est appelé **l'axe des imaginaires**

III.5. Conjugué d'un nombre complexe

Définition 6

Soit le nombre complexe $z=a+bi$. On appelle conjugué de z et on note $\bar{z}$ le nombre complexe $\bar{z}=a-bi$.

Exemple: Déterminer le conjugué de $z=-2+i$. Représenter graphiquement ces 2 complexes.
Remarque: Les points d'affixes conjugués sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

Propriété 1

Soient deux nombres complexes z et z'. Alors

$$\overline{z+z'}=\bar{z}+\bar{z}'$$

III.6. Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Définition 7

Soit $z=a+bi$ un nombre complexe non nul. On note M le point d'affixe z dans un repère

orthnormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
- *On appelle **module** de z et on note $|z|$ le nombre égal à la distance OM :*

$$|z| = OM = \|\overrightarrow{OM}\|$$

- *On appelle **argument** de z et on note $arg(z)$, toute mesure de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$*

Exemple: Déterminer le module et l'argument de $z = 2 + 2i$

Théorème 1

Le nombre complexe de module $|z|$ et d'argument θ s'écrit :

$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$$

*Cette écriture est appelée **forme trigonométrique** du nombre complexe z, et nous avons les relations suivantes :*

$$\cos\theta = \frac{a}{|z|} \qquad \sin\theta = \frac{b}{|z|}$$