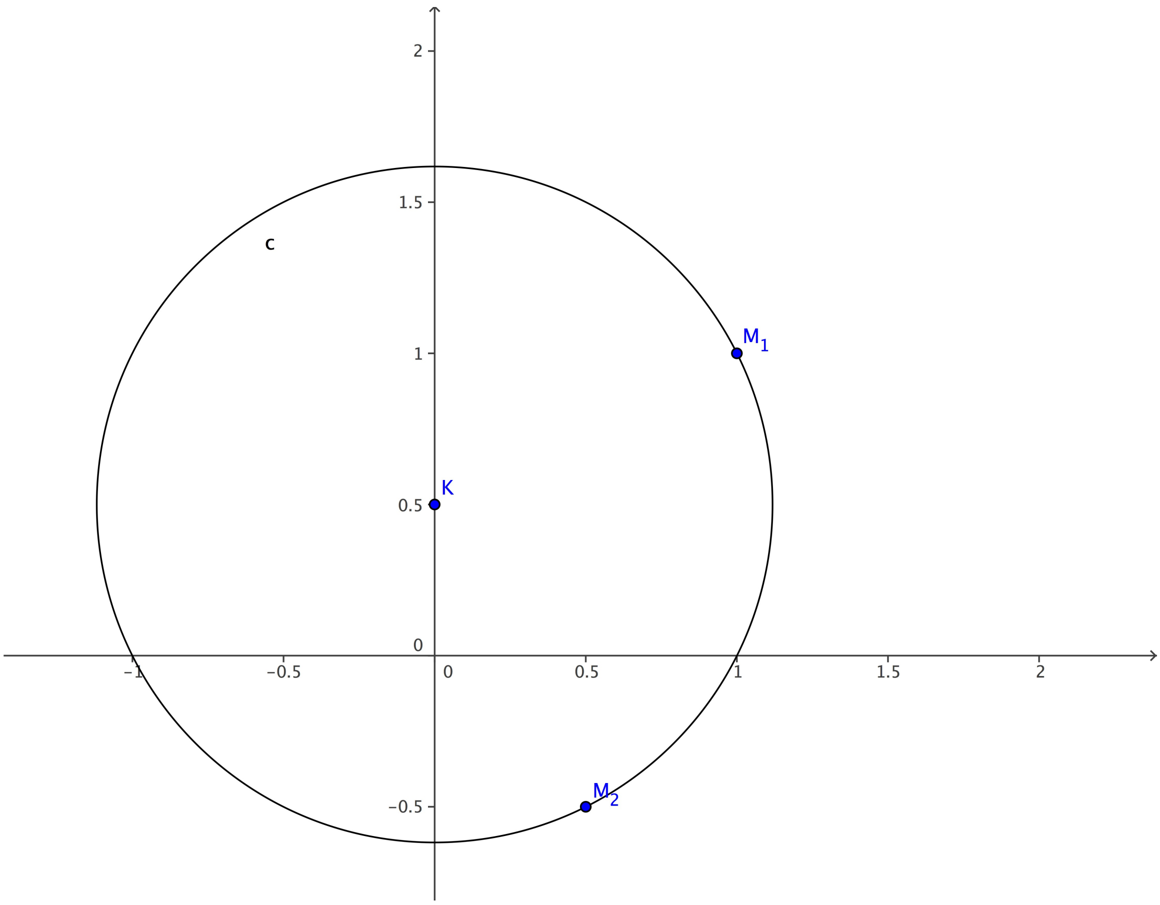
BAC BLANC

corrigé

Exercice 1:



1. *(cf dessin)*

2. $|z_1|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$ et $|z_2|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{2}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

   On note θ_1 un argument de z_1 et θ_2 un argument de z_2.

   on a $\cos\theta_1=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta_1=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

   donc l'angle θ_1 vaut $\frac{\pi}{4}+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

   on a $\cos\theta_2=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta_2=\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

   donc l'angle θ_2 vaut $-\frac{\pi}{4}+2k'\pi$ avec $k'\in\mathbb{Z}$

3. On calcule les distances KM_1 et KM_2.

$KM_1 = |z_1 - z_3| = \left|1 + i - \frac{i}{2}\right| = \left|1 + \frac{i}{2}\right| = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

$KM_2 = |z_2 - z_3| = \left|\frac{1}{2} - \frac{i}{2} - \frac{i}{2}\right| = \left|\frac{1}{2} - i\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ donc M_1 et M_2 sont sur le même cercle de centre *K*.

4. On a $M_1 M_2 = |z_2 - z_1| = \left|\frac{1}{2} - \frac{i}{2} - 1 - i\right| = \left|-\frac{1}{2} - i\left(\frac{3}{2}\right)\right| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{10}{4}} = \sqrt{\frac{5}{2}}$

   donc $M_1 M_2^2 = \frac{5}{2}$ et d'autre part, $KM_1^2 + KM_2^2 = \frac{5}{4} + \frac{5}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$ donc le triangle $M_1 K M_2$ est rectangle, d'après Pythagore.

5. Pour résoudre l'équation, $8z^2 - 4z + 1 = 0$ on calcule le discriminant

   $\Delta = 16 - 32 = -16$ on obtient donc deux solutions complexes $\frac{4 - 4i}{16}$ et $\frac{4 + 4i}{16}$ soit $\frac{1}{4} - \frac{i}{4}$ et

   $\frac{1}{4} + \frac{i}{4}$ Le nombre complexe $\frac{z_3}{z_1} = \frac{\frac{i}{2}}{1+i} = \frac{i}{2+2i} = \frac{i^2}{2i + 2i^2} = -\frac{1}{-2+2i} = \frac{1}{2-2i}$

Exercice 2:

1. a) $hl = \frac{1}{2}$ donc $l = \frac{1}{2h}$

   b) la longueur $g(h)$ du contour intérieur vaut $h + l + h$ soit $2h + \frac{1}{2h}$

   c) L'expression de la dérivée g' est $g'(h) = 2 - \frac{1}{2h^2} = \frac{4h^2 - 1}{2h^2} = \frac{(2h-1)(2h+1)}{2h^2}$

   d) $g'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow 2h - 1 \geqslant 0$ car $2h + 1$ et $2h^2$ sont positifs sur $]0\,;+\infty[$.

   d'où $g'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow h \geqslant \frac{1}{2}$ ce qui nous donne comme tableau de variation:

h	$-\infty$		$1/2$		$+\infty$
signe de g'		-		+	
g		$\searrow$	2	$\nearrow$	

2. Pour obtenir le frottement minimal, il faut donc que *h* soit égal à $\frac{1}{2}$ ce qui correspond à

   $g(h) = 2\ mètres$ c'est à dire $h = 1\ mètre$.

Problème:

Partie A

1. $g'(x) = 3\,x^2 + \dfrac{2}{x}$ et $x \in \left]0\,;+\infty\right[$ donc $g'(x)$ est positif

2.

x	0	$+\infty$
g'	$\|\|$ $+$	
g	$\|\|$ $\nearrow$	

3. $g(1) = 0$

4. D'après le tableau de variation, g est négative sur $\left]0\,;1\right]$ et positive sur $\left[1\,;+\infty\right[$

Partie B

1. a) $\lim\limits_{x\to+\infty} = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x}\,\dfrac{1}{x} = 0$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \ln x \left(\dfrac{1}{x^2}\right) = -\infty$

b) On calcule $f(x) - (x-1)$ ce qui donne $-\dfrac{\ln x}{x^2}$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{\ln x}{x^2} = 0$ donc $y = x-1$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

On a trouvé à la question 1. que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$ ce qui prouve l'existence d'une asymptote verticale en 0 d'équation $x = 0$.

c) $f'(x) = 1 - \dfrac{\frac{1}{x}x^2 - 2\,x\ln x}{x^4}\; 1 - \dfrac{x - 2\,x\ln x}{x^4} = 1 - \dfrac{1 - 2\ln x}{x^3} = \dfrac{x^3 - 1 + 2\ln x}{x^3} = \dfrac{g(x)}{x^3}$

d) Le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $g(x)$ sur $\left]0\,;+\infty\right[$, donc $f'(x)$ est positif sur $\left]0\,;1\right]$ et négatif sur $\left[1\,;+\infty\right[$ ce qui donne le tableau de variation suivant:

x	0		1		$+\infty$
f'	$\|\|$	$+$		$-$	
f	$\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

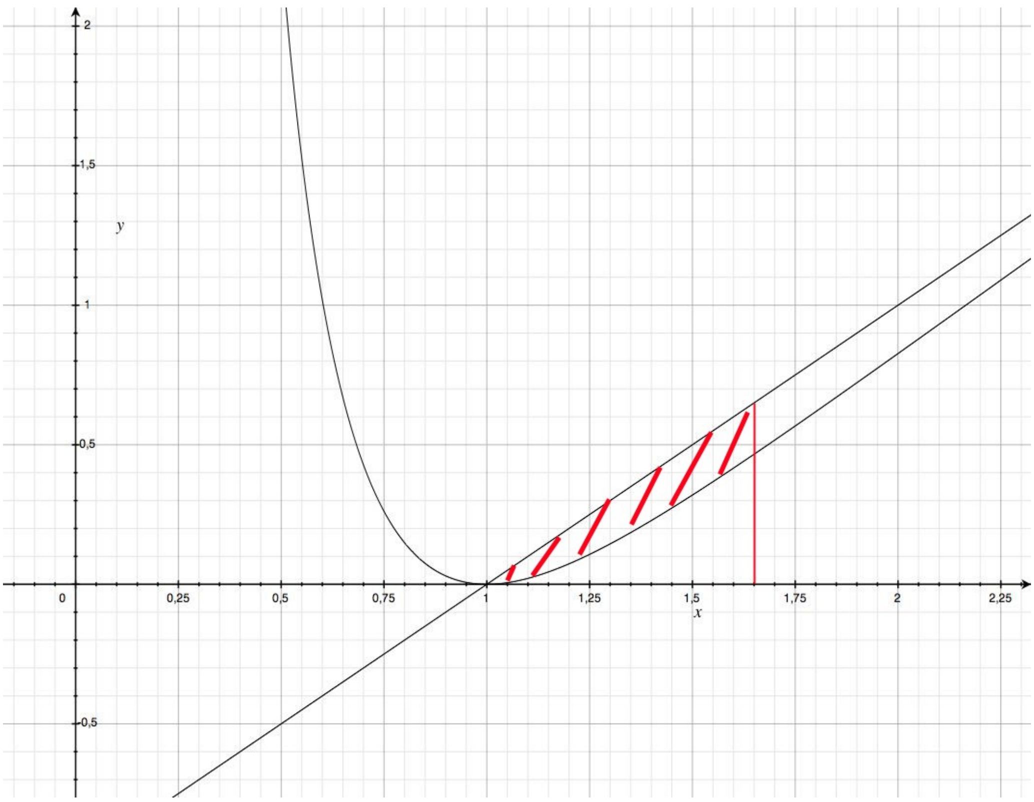
e) Déterminons le point d'intersection entre D et $\mathcal{C}_f$ en résolvant le système suivant:

$\begin{cases} y = x-1 \\ y = x-1-\dfrac{\ln x}{x^2} \end{cases}$ c'est à dire $\begin{cases} y = x-1 \\ -\dfrac{\ln x}{x^2} = 0 \end{cases}$ soit $\begin{cases} y = x-1 \\ \ln x = 0 \end{cases}$ on trouve donc $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$

La position de la courbe C_f par rapport à la droite D est donnée par le signe de la différence

$f(x)-(x-1) = -\dfrac{\ln x}{x^2}$ qui est négative sur $[1\,;+\infty[$ et positive sur $]0\,;1[$

donc C_f est en dessous de D sur $]1;+\infty[$ et au-dessus sur $]0;1[$.



2. $H'(x) = \dfrac{1}{x^2}(1+\ln x) - \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{\ln x}{x^2} - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{\ln x}{x^2} = h(x)$

donc H est bien une primitive de h.

b) l'aire demandée est donnée par: $\displaystyle\int_1^{\sqrt{e}} x-1\,dx - \int_1^{\sqrt{e}} f(x)\,dx = \int_1^{\sqrt{e}} \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \int_1^{\sqrt{e}} h(x)\,dx$

d'où $\Delta = (H(\sqrt{e}) - H(1)) = \left(-\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)(1+\ln\sqrt{e}) - (-1)$

$= -\dfrac{1}{\sqrt{e}}(1+\ln\sqrt{e}) + 1 = -\dfrac{1}{\sqrt{e}}\left(1+\dfrac{1}{2}\right) + 1 = -\dfrac{3}{2\sqrt{e}} + 1$ unité d'aire

Or une unité d'aire vaut 6 cm^2 donc $\Delta = 6\left(1-\dfrac{3}{2\sqrt{e}}\right) \approx 0{,}54\ mm^2$