BAC BLANC

Durée: 4 heures Coefficient: 4

-

L'usage des calculatrices est autorisé pour cette épreuve

-

Le candidat doit traiter les deux exercices et le problème.

Il sera tenu compte de la clarté des raisonnements et de la qualité de la rédaction dans l'appréciation des copies.
Dès que le sujet vous est remis assurez-vous qu'il est complet, que toutes les pages sont imprimées.

Le formulaire officiel de mathématiques et deux feuilles de papier millimétré sont distribués en même temps que le sujet.

Exercice 1: (5 points)

Le nombre complexe i est le nombre complexe de module 1 et dont un argument est $\pi/2$.

Le plan rapporté au repère orthonormal direct $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$ d'unité graphique 4 cm est noté $\mathcal{P}$.

Les nombres complexes

$$1+i, \qquad \frac{1}{2}-\frac{i}{2} \qquad \text{et} \qquad \frac{i}{2}$$

sont respectivement notés z_1, z_2 et z_3.

Les points M_1, M_2 et K du plan $\mathcal{P}$ sont les points d'affixes respectives z_1, z_2 et z_3.

1. Placer les points M_1, M_2 et K dans le plan $\mathcal{P}$.
2. Déterminer le module et l'un des arguments de chacun des nombres complexes z_1 et z_2
3. Montrer que les points M_1 et M_2 sont sur un cercle de centre K dont on déterminera le rayon.

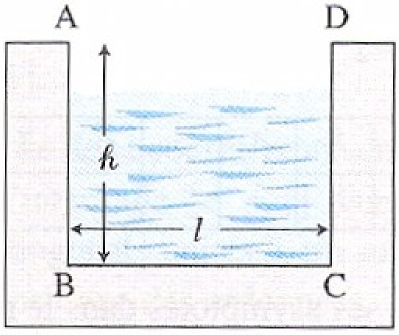
   Tracer ce cercle dans le plan $\mathcal{P}$.
4. Démontrer que le triangle $M_1 K M_2$ est rectangle.
5. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z

$$8z^2-4z+1=0$$

   Vérifier que le nombre complexe $\frac{z_3}{z_1}$ est l'une des solutions de cette équation.

Exercice 2: (3 points)

On veut, avant construction, rendre minimal le frottement d'unfluide contre les parois d'un canal ouvert, de section intérieur rectangulaire *ABCD*. L'aire de la section intérieure de ce canal doit être de 0,5 m^2. On désigne par h la hauteur et par ℓ la largeur (en mètres) de cette section intérieure.



On admettra que le frottement est minimal lorsque la longueur *AB+BC+CD* de la section intérieure est minimale.

1. Ecrire ℓ en fonction de *h*.
2. Montrer que la longueur *g(h)* du contour intérieur de la section s'exprime en fonction de h par:

$$g(h)=2h+\frac{1}{2h} \qquad \text{où } h>0$$

3. a) Montrer que la dérivée g' de g a pour expression $g'(h)=\dfrac{(2h-1)(2h+1)}{2h^2}$

   b) En déduire le signe de g' suivant les valeurs de h et le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle]0,+∞[. Dresser son tableau de variation.
4. Déduire de ce qui précède les valeurs de h et de ℓ permettant d'obtenir le frottement minimal.

Problème: (12 points)

Partie A – Etude du signe de $x^3-1+2\ln x$ -

Soit g la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par:

$$g(x)=x^3-1+2\ln x$$

1. Calculer $g'(x)$ et étudier son signe.
2. Dresser le tableau de variation de la fonction g. (Les limites ne sont pas demandées.)
3. Calculer $g(1)$
4. Déduire des questions précédentes le signe de $g(x)$ sur $]0\,;+\infty[$.

– Partie B – Courbe représentative d'une fonction et calcul d'aire -

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par:

$$f(x)=x-1-\frac{\ln x}{x^2}$$

On appelle $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ (unités: 3 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées.)

1. a) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

   b) Montrer que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y=x-1$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$. Y a-t-il une autre asymptote à $\mathcal{C}_f$? Si oui donner son équation.

   c) Calculer $f'(x)$ et montrer que l'on peut écrire

   $$f'(x)=\frac{g(x)}{x^3}$$

   d) En utilisant les résultats de la partie **A**, déterminer le signe de $f'(x)$, puis dresser le tableau de variation de la fonction f.

   e) Calculer les coordonnées du point d'intersection entre l'asymptote $\mathcal{D}$ et la courbe $\mathcal{C}_f$. Étudier la position de la courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à la droite $\mathcal{D}$.

   f) Tracer dans le repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ la courbe $\mathcal{C}_f$ et la droite $\mathcal{D}$.

2. a) Montrer que la fonction H définie par:

   $$H(x)=-\frac{1}{x}(1+\ln x)$$

   est une primitive de la fonction h définie sur $]0\,;+\infty[$ par:

   $$h(x)=\frac{\ln x}{x^2}$$

   b) Soit Δ le domaine du plan limité par $\mathcal{D}$, $\mathcal{C}_f$ et les droites d'équation $x=1$ et $x=\sqrt{e}$. Hachurer Δ. Calculer la valeur exacte de l'aire, en cm^2, de Δ puis en donner une valeur approchée au mm^2 près.

NOM: .... Prénom: ....

NOM: .... Prénom: ....