

DEVOIR SURVEILLE n°1
corrigé

Exercice 1: (4 points)

1. $A = \ln\left(\frac{75}{256}\right) = \ln 75 - \ln 256 = 2 \ln 5 + \ln 3 - 8 \ln 2$ $B = \ln 120 = 3 \ln 2 + \ln 3 + \ln 5$

2. $\ln(\sqrt{6}-1) + \ln(\sqrt{6}+1) - \ln\sqrt{100} - \ln\left(\frac{1}{8}\right)$
 $= \ln((\sqrt{6}-1)(\sqrt{6}+1)) - \ln(\sqrt{100}) - \ln\left(\frac{1}{8}\right)$
 $= \ln(6-1) - \ln(10) - \ln 1 + \ln 8$
 $= \ln 5 - \ln 10 + \ln 8 = \ln\left(\frac{5}{10}\right) + \ln 8 = \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln 8 = \ln\left(\frac{8}{2}\right) = \ln 4 = 2 \ln 2$

Exercice 2: (4 points)

1. a) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$

b) $x^2 \left(1 - \frac{2}{x^2} - \frac{2 \ln x}{x^2}\right) = x^2 - 2 - 2 \ln x$ Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

c) C_f admet une asymptote verticale d'équation $x=0$ car $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$

Problème: (12 points)**I.**

1. a) $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$

2.

x	0	1	3	$+\infty$
f	$+\infty$	0	0	1

(Arrows in the original image indicate a decreasing trend from $+\infty$ at $x=0$ to 0 at $x=1$, and an increasing trend from 0 at $x=3$ to 1 at $x=+\infty$.)

II. 1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^2 + bx + c}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^2 \frac{a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}}{x^2}\right) = a$ donc d'après 1.b) on a $a = 1$

2. $g(1) = 0$ et $g(3) = 0$ donc on a le système suivant:

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ \frac{9a + 3b + c}{9} = 0 \end{cases} \text{ d'où } \begin{cases} a + b + c = 0 \\ 9a + 3b + c = 0 \end{cases}$$

3. On sait que $a = 1$ donc on obtient:

$$\begin{cases} b+c=-1 \\ 3b+c=-9 \end{cases} \text{ c'est à dire } 2b=-8 \text{ soit } b=-4 \text{ et } c=3$$

l'expression de $g(x)$ est donc $g(x) = x^2 - 4x + 3$

I. a) $f(x) = x \left(-\frac{3}{x^2} - \frac{4 \ln x}{x} + 1 \right)$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

b) $f(x) = \frac{1}{x} (-3 - 4x \ln x + x^2)$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ car $\lim_{x \rightarrow 0} -\frac{3}{x} = -\infty$

2. a) $f'(x) = \frac{3}{x^2} - \frac{4}{x} + 1 = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2}$ donc $f'(x) = g(x)$

b) Comme $f'(x) = g(x)$ est négatif sur $[1; 3]$ on obtient le tableau de variation suivant:

x	0	1	3	$+\infty$
signe de f'		+	-	+
f	$-\infty$	-2	$2-4\ln 3$	$+\infty$

c) $f(1) = -2$ et $f(3) = 2 - 4 \ln 3$

II. 1. a) f n'admet pas de solution dans l'intervalle $]0,3[$ car $f(1) < 0$

b) admet une solution unique, notée α , dans l'intervalle $[3,10]$ car $f(3) < 0$ et $f(10) > 0$

c) n'admet pas de solution dans l'intervalle $]10;+\infty[$ car $f(10) > 0$

2.

x	$f(x)$
9,15	-0,032
9,16	-0,026
9,17	-0,02
9,18	-0,014
9,19	-0,008
9,20	-0,002
9,21	0,003
9,22	0,009
9,23	0,0151
9,24	0,0211
9,25	0,0271

donc $9,20 \leq \alpha \leq 9,21$