Devoir surveillé n°1

Exercice 1 *(6 points)*

Un groupe industriel possède deux filiales MAT et MATIC qui produisent des petits moteurs destinés au montage de jouets.

La variable aléatoire X qui, à chaque moteur tiré au hasard dans la production, associe sa durée de vie moyenne exprimée en heures, suit la loi normale de moyenne 400 et d'écart type 40.

1. Un moteur est déclaré non commercialisable si sa durée de vie est inférieure à 318 heures. Calculer, à 10^{-4} près la probabilité p qu'un moteur prélevé au hasard dans la production ne soit pas commercialisable.
2. On admet que $p = 0,02$. Soit Y la variable aléatoire qui, à tout lot de 50 moteurs, associe le nombre de moteurs non commercialisables. La production est assez importante pour que l'on puisse assimiler le prélèvement de 50 moteurs à un prélèvement aléatoire avec remise.)
   (a) Quelle est la loi suivie par Y ? Justifier la réponse et donner ses paramètres.
   (b) Calculer à 10^{-3} près la probabilité de l'événement : « *il y a au plus trois moteurs non commercialisables* ».

Exercice 2 *(5 points)*

On a observé que 2% des micro-ordinateurs d'un type donné tombent en panne par mois d'utilisation. On suppose que les pannes de tels micros sont indépendantes. On note X la variable aléatoire associant le nombre mensuel de pannes prévisibles à chaque parc de 150 micros (on assimilera le choix des 150 micros à un tirage avec remise et on supposera les pannes indépendantes).

1. Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale de paramètre n=150 et p=0,02.
2. Calculer à 10^{-3} près, la probabilité de chacun des événements suivants :
   – A : « le nombre mensuel de pannes est 5 »
   – B : « le nombre mensuel de pannes est au plus égal à 3 »
   – C : « le nombre mensuel de pannes est compris entre 4 et 6 »
3. On admet que la loi de X peut être approchée par une loi de Poisson de paramètre λ. Calculer ce paramètre.
4. On utilise cette approximation dans la suite de l'exercice.
   (a) Refaire les calculs du 2.
   (b) Les résultats obtenus diffèrent-ils de moins de 1% par rapport aux résultats de la question 2 ?

Exercice 3 *(9 points)*

On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad y'' - 4y = -\frac{16}{3}e^{-2x}$$

où y est une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, y' la fonction dérivée de y, et y'' sa fonction dérivée seconde.

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :

   $$(E_0) \qquad\qquad y'' - 4y = 0.$$

2. Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

   $$g(x) = \frac{4}{3}xe^{-2x}$$

   est une solution particulière de l'équation différentielle (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution particulière h de l'équation différentielle (E) vérifiant les conditions

   $$h(0) = \frac{4}{3} \qquad \text{et} \qquad h'(0) = -\frac{4}{3}.$$