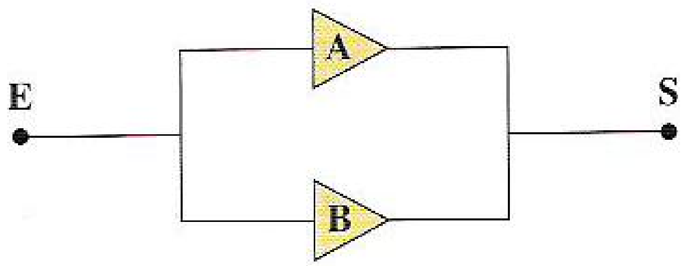
Devoir surveillé n°1

Exercice 1 *(4 points)*

Un système est formé de deux amplificateurs A et B qui n'interfèrent pas l'un sur l'autre. A partir d'un signal appliqué à l'entrée E, on obtient un signal à la sortie si au moins un des deux amplificateurs fonctionne.



On note respectivement les événements :
A : « A fonctionne »
B : « B fonctionne »
S : « il existe un signal à la sortie »

1. On suppose que $P(A) = 0,8$, $P(B) = 0,9$ et $P(A \cap B) = 0,72$.
   Calculer la probabilité qu'il y ait un signal à la sortie.
   En déduire la probabilité qu'il n'y ait pas de signal de sortie.
2. On suppose maintenant que A ne fonctionne pas dans 30 % des cas, que B fonctionne dans 85% des cas et que, dans 5% des cas, on n'a pas de signal à la sortie.
   Calculer la probabilité pour que A et B fonctionnent simultanément.

Exercice 2 *(8 points)*

L'entreprise a fabriqué en un mois 900 chaudières à cheminée et 600 chaudières à ventouse. Dans ce lot, 1 % des chaudières à cheminée sont défectueuses et 5 % des chaudières à ventouse sont défectueuses. On prélève au hasard un chaudière dans la production de ce mois. Toutes les chaudières ont la même probabilité d'être prélevées. On considère les événements suivants :
A : "La chaudière est à cheminée"
B : "La chaudière est à ventouse"
D : "La chaudière présente un défaut"

1. Déterminer $P(A)$, $P(B)$, $P_A(D)$ et $P_B(D)$
2. Calculer $P(D \cap A)$ et $P(D \cap B)$
3. En remarquant que $D = (D \cap A) \cup (D \cap B)$ et que les événements $(D \cap A)$ et $(D \cap B)$ sont incompatibles, calculer $P(D)$ et $P(\overline{D})$.

Exercice 3 *(8 points)*

On considère l'équation différentielle (E) :

$$y' + y = (2x + 3)e^{-x}$$

où y est une fonction de la variable réelle x, définie sur $\mathbb{R}$

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E_0) :

$$y' + y = 0$$

2. Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = (x^2 + 3x)e^{-x}$$

est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

3. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution f de cette équation qui vérifie la condition initiale $f(0) = 1$.