DEVOIR SURVEILLE n°1

Exercice 1: (4 points)

1. Ecrire les nombres suivants en fonction de ln2, ln3 et ln5:

$A=\ln\left(\dfrac{75}{256}\right)$ $\qquad B=\ln 120$

2. Démontrer que: $\ln\left(\sqrt{6}-1\right)+\ln\left(\sqrt{6}+1\right)-\ln\left(\sqrt{100}\right)-\ln\left(\dfrac{1}{8}\right)=2\ln 2$

Exercice 2: (4 points)

On considère la fonction définie sur]0;+∞[par $f(x)=x^2-2-2\ln x$ et on note C_f sa courbe représentative.

1. a) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

   b) Montrer que pour tout x de $]0\,;+\infty[$, $f(x)=x^2\left(1-\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{2\ln x}{x^2}\right)$

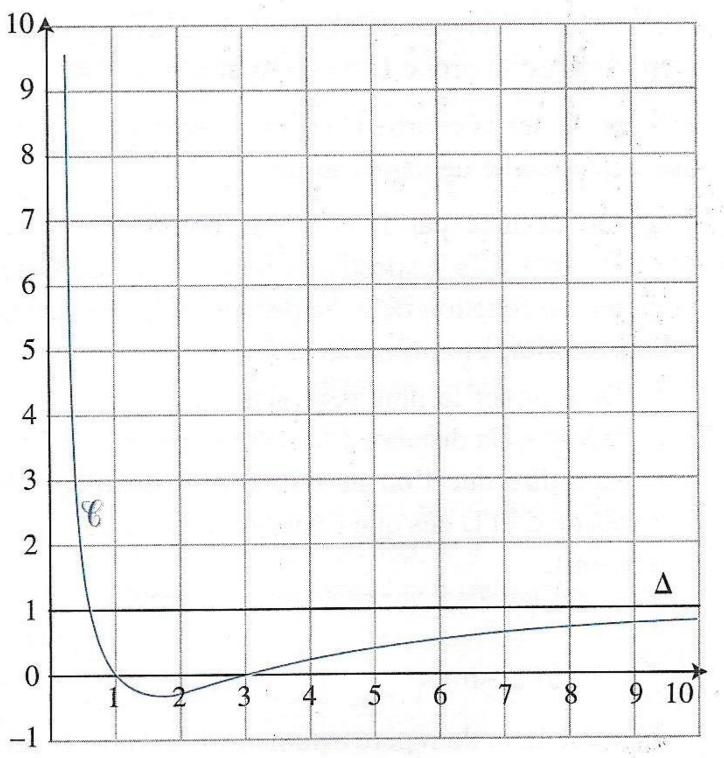
   En déduire $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

   c) Préciser les éventuelles asymptotes à C_f

Problème: (12 points) *Les deux parties du problème peuvent être traitées séparément.*

Partie A: Exploitation d'un graphique

On considère la fonction g définie sur]0;+∞[, dont la représentation graphique C_f, obtenue sur l'écran d'une calculatrice, est donnée sur la figure ci-dessous.



On précise que la courbe C_f ne coupe l'axe des abscisses qu'en deux points et qu'elle admet l'axe des ordonnées et la droite Δ qui est parallèle à l'axe des abscisses comme asymptotes.

I. A partir de cette représentation graphique:

1. Déterminer:

a) La limite de $g(x)$ lorsque x tend vers 0

b) La limite de $g(x)$ lorsque x tend vers l'infini.

2. Dresser un tableau donnant le signe de $g(x)$ lorsque x décrit l'intervalle $]0;+\infty[$.

II. On admet que $g(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{x^2}$ où a,b et c sont trois nombres réels.

1. En calculant la limite de $\dfrac{ax^2+bx+c}{x^2}$ lorsque x tend vers l'infini, montrer que $a=1$.

2. Lire $g(1)$ et $g(3)$ sur le graphique et en déduire un système de deux équations permettant d'obtenir b et c.

3. Résoudre ce système et exprimer $g(x)$ en remplaçant a, b et c par leur valeurs.

Partie B: Etude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=-\dfrac{3}{x}-4\ln x+x$

I. a) En mettant x en facteur dans l'expression de $f(x)$, montrer que la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ est égale à $+\infty$.

b) En mettant $\dfrac{1}{x}$ en facteur dans l'expression de $f(x)$, montrer que la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0 est égale à $-\infty$. (On rappelle que $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x=0$)

2. a) Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)=g(x)$

b) Utiliser les résultats de la partie A pour en déduire le tableau de variation de f.

c) Calculer les valeurs exactes de $f(1)$ et $f(3)$.

II. En utilisant le tableau de variation de *f*, justifier que l'équation $f(x)=0$

1. a) n'admet pas de solution dans l'intervalle]0,3[;
   b) admet une solution unique, notée α, dans l'intervalle [3,10];
   c) n'admet pas de solution dans l'intervalle]10;+∞[.

2. Compléter le tableau suivant, après l'avoir reproduit, en déduire un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.

x	$f(x)$
9,15	
9,16	
9,17	
9,18	
9,19	
9,20	
9,21	
9,22	
9,23	
9,24	
9,25	